

CAPÍTULO 2

PRINCÍPIO DE OPERAÇÃO DOS RELÉS

2	PRINCÍPIO DE OPERAÇÃO DOS RELÉS	1
2.1	INTRODUÇÃO.....	1
2.2	DETECÇÃO DE FALTAS.....	1
2.2.1	Detector de nível.....	1
2.2.2	Comparador de magnitude	2
2.2.3	Comparação diferencial	3
2.2.4	Comparador do ângulo de fase.....	5
2.2.5	Medição da distância.....	6
2.2.6	Proteção piloto	6
2.2.7	Conteúdo harmônico.....	6
2.2.8	Sensor de Frequência	6
2.3	PROJETO DE RELÉS	6
2.3.1	Fusíveis	6
2.3.2	Relés eletromecânicos.....	9
2.3.2.1	Relé tipo êmbolo.....	9
2.3.2.2	Relé tipo indução	10
2.3.3	Relé direcional.....	13
2.3.4	Relé de Z, X, MHO.....	14
2.3.4.1	Relé de Z	14
2.3.4.2	Relé de admitância (MHO).....	15
2.3.4.2.1	Efeito do arco elétrico no relé MHO	17
2.3.4.3	Relé de X	18
2.3.5	Relés poligonais.....	19
2.3.6	Relés estáticos (Unidades de Estado Sólido).....	20
2.3.6.1	Unidade “E” (AND)	21
2.3.6.2	Unidade “OU” (OR)	21
2.3.6.3	Unidade “NÃO” (NOT)	21
2.3.6.4	Unidade NAND	23
2.3.6.5	Unidade NOR.....	23
2.3.6.6	Unidades Temporizadas.....	23
2.3.6.7	MHO estático.....	24
2.3.7	Relé microprocessado.....	25
2.4	DEFINIÇÕES BÁSICAS PARA RELÉS	26
2.4.1	Definição de contatos	26
2.4.2	Bandeirola (Target)	27
2.4.3	Unidade de selo	27
2.4.4	Tempo de operação.....	27
2.4.5	Razão pickup e reset	28
2.4.6	Circuitos de controle.....	28

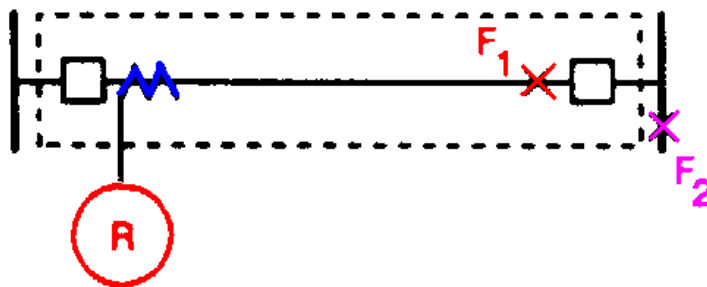
2 Princípio de operação dos relés

2.1 Introdução

- Parâmetros que refletem a presença de um defeito são E e I ;
- Como definir as quantidades capazes de diferenciar condição normal e anormal;
 - Normal $\rightarrow$ a perturbação está fora da zona de proteção $\rightarrow$ segurança do sistema de proteção;

1: EXEMPLO

Considere a Fig. 2.1. É possível o relé R (sobrecorrente) determinar se o defeito está em F_1 ou F_2 ?



- * O $|I_f|$, somente, não permite determinar se a falta está em F_1 ou em F_2

FIGURA 2.1 – Problema de seletividade para faltas no limite da zona de proteção.

- Os relés podem ser:
 - Eletromecânicos
 - Estáticos
 - microprocessador;
- A descrição das características dos relés é geralmente em termos do relé eletromecânico;
- O tipo de tecnologia utilizada na construção de relés não implica em mudar os fundamentos da proteção;
- Relés microprocessadores ainda utilizam muitos dos fundamentos e conceitos obtidos com os relés eletromecânicos.

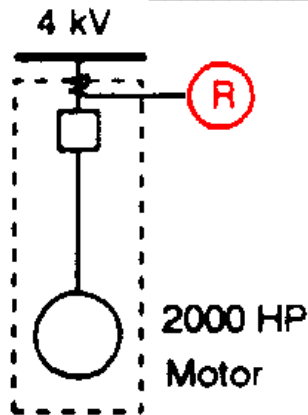
2.2 Detecção de faltas

Quando um C-C ocorre $\rightarrow |E| \downarrow |I| \uparrow$, mudança no ângulo de fase dos fasores de corrente e tensão, surgem componentes harmônicas, variações de potência ativa e reativa, variação na frequência, entre outros. Portanto, cabe ao relé detectar estas mudanças e verificar se a falta está dentro de sua zona de atuação.

2.2.1 Detector de nível

2: EXEMPLO

Considere a Fig. 2.2, onde o $|I_{cc}| > |I_L|$ e determine o $|I|$ para o qual uma condição de defeito é identificada.



I plena carga = 245 A
sobrecarga emergencial $\rightarrow 25\% \rightarrow 1.25 \cdot 245 = 306$ A
+ margem de segurança

$\Downarrow$

$I > 346$ A $\rightarrow$ existe uma condição anormal dentro da zona de proteção do motor.

1 HP = 0.746 kW

FIGURA 2.2 – Proteção de sobrecorrente de um motor.

- Pickup (I_p): é o nível acima do qual o relé deve operar.
- Relé de subtensão: opera para valores abaixo do valor de pickup.
- Existe a necessidade de normalizar a I , ou seja, fazer I_{real}/I_p ;
- A Fig. 2.3 mostra um detector de nível ideal e real;

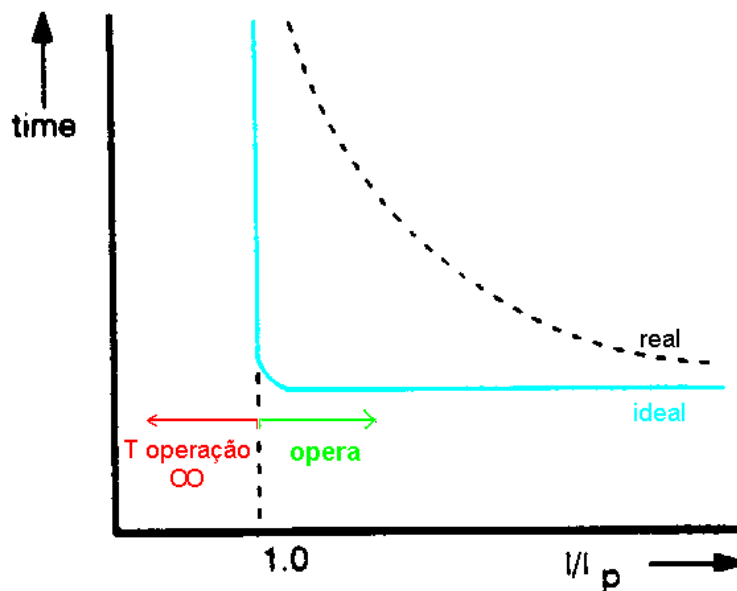


FIGURA 2.3 – Característica de um relé detector de nível.

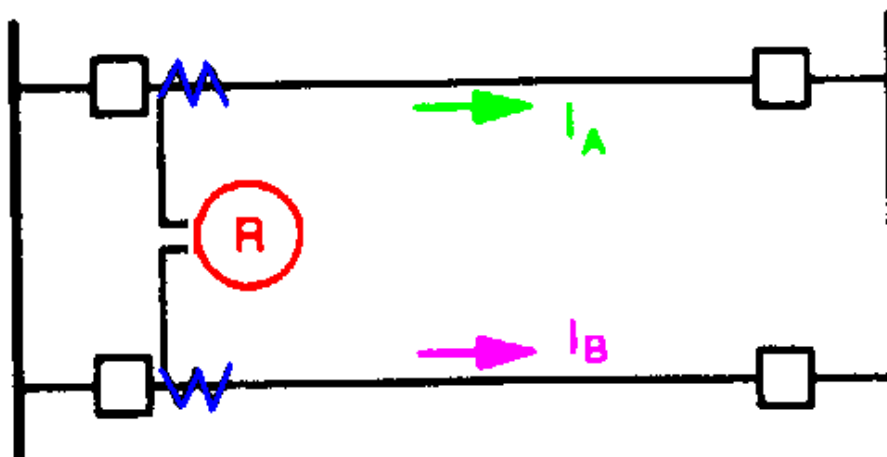
2.2.2 Comparador de magnitude

- Compara grandezas de operação entre si;

3: EXEMPLO

Considere que o relé R da Fig. 2.4 é uma unidade de balanço de corrente (61), que apresenta as seguintes características:

- Compara o $|I|$ de um circuito com a do outro circuito;
- Em condições normais de operação $|I_{circ1}| \approx |I_{circ2}|$;
- Relé atua quando diferença de $|I_{circ1}| - |I_{circ2}| > \text{tolerância}$.



Relé opera quando a diferença de corrente for maior que a tolerância;

- Duas linhas // idênticas;
- **SE** $|I_A| > |I_B| + \varepsilon$, **E** a linha B não está aberta $\rightarrow$ falta na LT A;
- Lógica similar para a LT B.

FIGURA 2.4 – Relé comparador de magnitude utilizado em linhas de transmissão com circuito em paralelo.

2.2.3 Comparação diferencial

A Fig. 2.5 mostra um dos métodos de proteção mais eficiente, ou seja, a proteção diferencial. Esta pode ser ainda melhorada por meio da utilização de relés diferenciais percentuais Fig. 2.6.

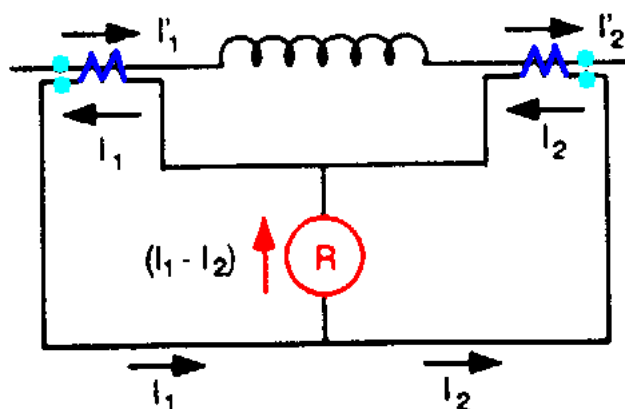


FIGURA 2.5 – Comparador diferencial aplicado a um enrolamento do gerador.

- Pode ser utilizado um relé comparador de magnitude (corrente) ou um relé detector de nível $(I_1 - I_2)$;
- É capaz de detectar $|I_{cc}|$ bastante pequena (grande sensibilidade);

Conforme mostra a Fig.2.5 é necessário medir a corrente em ambas as extremidades da zona de proteção. Isto restringe sua aplicação a equipamentos, transformadores, geradores. Pode até ser utilizado na proteção de LT bastante curta (não se aplica para LT longas).

A Fig. 2.7 mostra uma comparação entre um esquema de proteção diferencial utilizando relé de sobrecorrente com um esquema que utiliza uma unidade diferencial percentual.

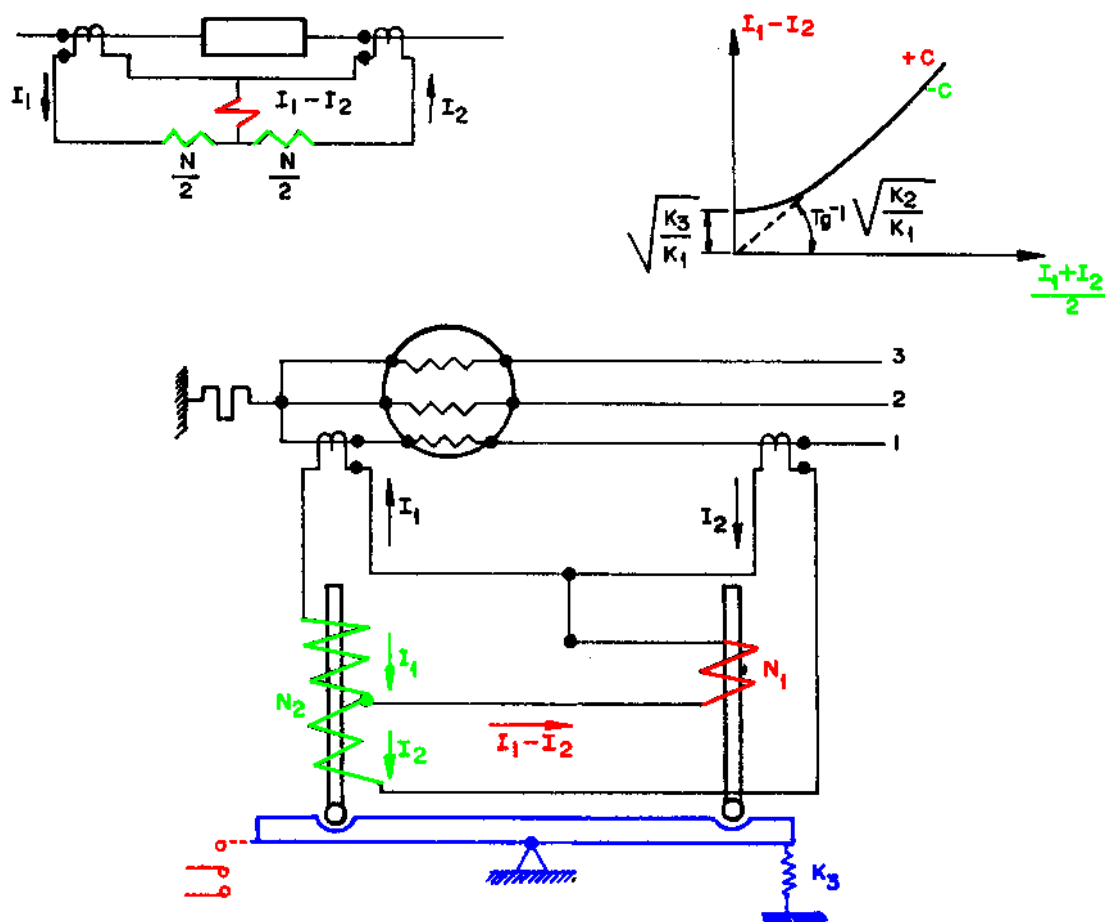


FIGURA 2.6 – Balança de torque para a proteção diferencial percentual.

$$T = K_1(I_1 - I_2)^2 - K_2 \left(\frac{I_1 + I_2}{2} \right)^2$$

No limiar de operação o torque é nulo e teremos:

$$(I_1 - I_2) = \sqrt{\frac{K_2}{K_1}} \cdot \left(\frac{I_1 + I_2}{2} \right)$$

$$(I_1 - I_2) = a \cdot \left(\frac{I_1 + I_2}{2} \right)$$

Fazendo $y = (I_1 - I_2)$ e $x = \frac{I_1 + I_2}{2}$, tem-se:

$$Y = a \cdot x$$

Onde

$$a = \frac{y}{x} = \frac{I_1 - I_2}{\frac{I_1 + I_2}{2}}$$

Logo, a é a declividade da reta definida por $y = a \cdot x$.

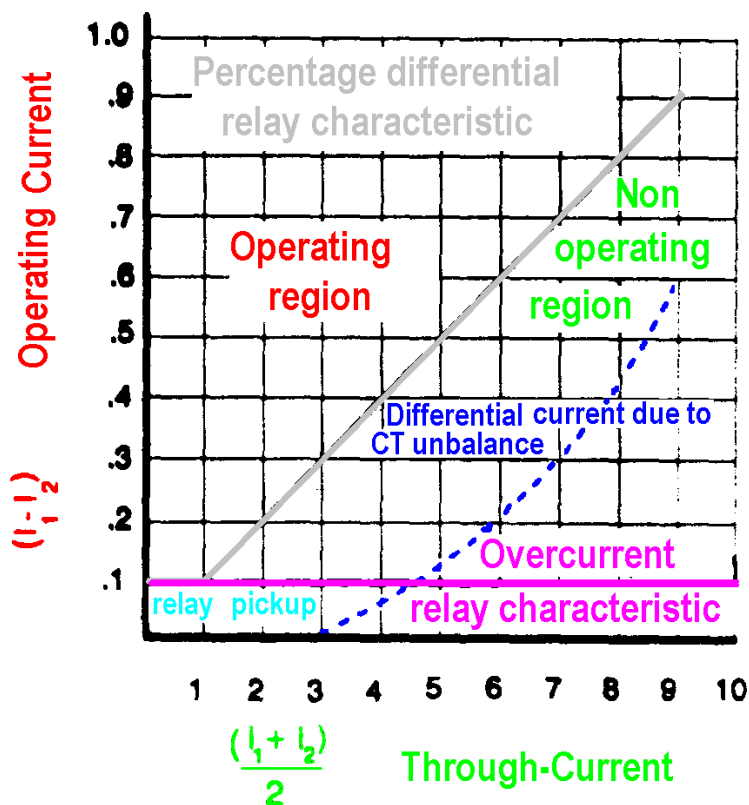


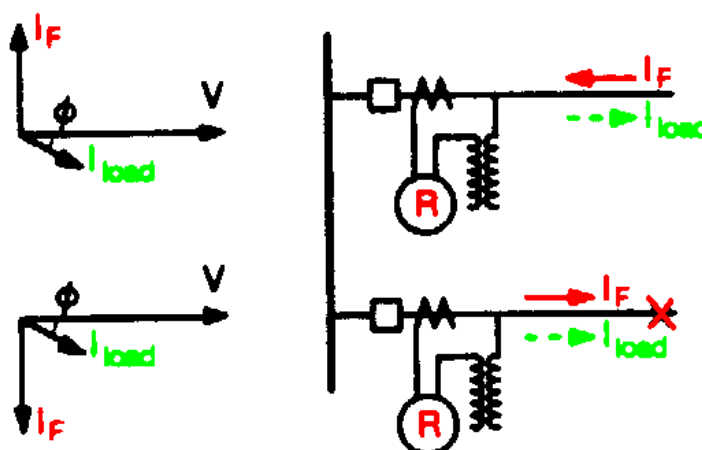
FIGURA 2.7 - Conexão diferencial utilizando unidade de sobrecorrente versus unidade diferencial percentual.

2.2.4 Comparador do ângulo de fase

É utilizado para determinar a direção da corrente, considerando uma grandeza de referência, ou seja:

- Fluxo de P em uma dada direção em condições normais $\rightarrow \phi \pm 30^\circ$; ϕ é o f.p.
 - Quando o fluxo de P flui na direção contrária $\rightarrow \phi = (180^\circ \pm 30^\circ)$
- Durante uma falta:
 - $\angle I$ com relação ao $\angle E$ numa determinada direção é $-\phi$
 - Direção inversa $\leftarrow (180^\circ - \phi)$
 - ϕ é o ângulo de Z do circuito em falta $\cong 90^\circ$, na transmissão;

Conforme mostra a Fig. 2.8, existem duas grandezas atuantes, no caso, tensão e corrente.



Relés direcionais para proteção contra curto-circuito são geralmente utilizados para suplementar outro relé (sobrecorrente, distância) que decide se uma determinada condição é um curto-circuito ou não, de modo a proporcionar a abertura do disjuntor. Os relés direcionais não são temporizados, nem ajustáveis, mas operam sob baixos valores de corrente (possuem boa sensibilidade).

2.2.5 Medição da distância

A proteção diferencial é economicamente inviável quando as distâncias envolvidas são muito grandes (comprimento dos fios do circuito secundário, quedas de tensão excessiva). Neste caso, a medição de distância é uma solução. Esta compara E_{LOCAL} com a I_{LOCAL} ao invés de comparar I_{LOCAL} com a I_{REMOTA} (diferencial). O efeito da comparação destas grandezas é a medição da Z da LT. Logo, esta se baseia no fato de que o comprimento da LT determina a Z_{LT} .

2.2.6 Proteção piloto

Leva em consideração a existência de informação de relés remotos e portanto, existe a necessidade de se dispor de meios de comunicação (PLC, microondas, linha telefônica, entre outros).

2.2.7 Conteúdo harmônico

Em condição de operação normal do sistema elétrico a forma de onda da tensão e corrente pode ser considerada senoidal na frequência fundamental (60 Hz). A 3ª harmônica de I e E pode estar presente durante as condições de operação normais (produzidas por geradores e cargas).

Por outro lado, em condições anormais, outras harmônicas ímpares (saturação de transformadores) ou componentes transitórias (energização de transformadores) surgem no sistema. As condições anormais podem ser detectadas por meio de filtros, caso os relés sejam eletromecânicos ou estáticos; ou por meio de algoritmos matemáticos, caso os relés sejam digitais.

2.2.8 Sensor de Frequência

Na condição de operação normal a frequência do sistema elétrico é 60 Hz. Qualquer desvio nesta indica que existe ou está para acontecer um problema.

A frequência pode ser medida por meio de filtros (n° de vezes que a forma de onda passa por zero) ou técnicas computacionais (PDS).

Um dos modos de se trazer o sistema para a frequência de operação normal (danos mecânicos nos geradores) é por meio da técnica de rejeição de carga.

2.3 Projeto de relés

O projeto de relés não será estudado com profundidade, e será apresentado para a formação de uma base para conhecer as capacidades e limitações dos relés.

2.3.1 Fusíveis

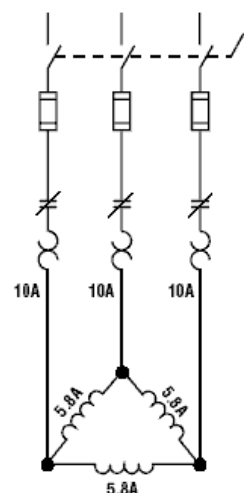
- É o dispositivo de proteção mais antigo e mais simples;
- É um detector de nível (sensor e dispositivo de interrupção);
- O tempo de interrupção é inversamente proporcional ao $|I|$;
- É muito utilizado na proteção de alimentadores e serviço auxiliar;
- Apresenta as seguintes desvantagem:
 - Uma única interrupção implica na sua substituição;
 - É possível um esquema que permite vários disparos. Neste caso os fusíveis são dispostos em paralelo onde um dispositivo mecânico de transferência faz o processo de substituição;

- Caso o circuito protegido seja 3 ϕ e a falta 1 ϕ -g temos o desligamento de uma única fase, embora as cargas alimentadas por duas fases. Isto implica em Aquecimento excessivo e vibrações devido ao desequilíbrio de E.

Quando uma das fases do secundário do transformador de força abre, a corrente nas fases são no motor trifásico pode teoricamente ser 1,73 vezes a corrente de carga pré-falta. Esse aumento da corrente pode ser ainda 2 vezes maior (200%) devido a mudança no fator de potência. Em aplicações onde a carga do motor apresenta grande inércia, a corrente pode se aproximar da corrente de rotor bloqueado, conforme mostram as Figuras 2.9 até 2.12.

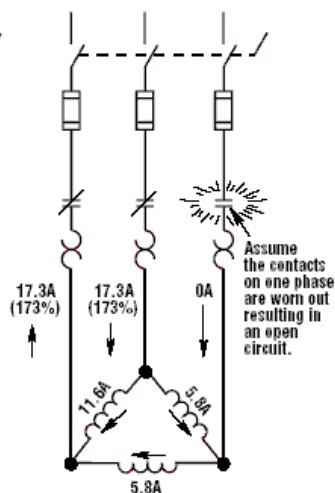
SINGLE-PHASING ON SECONDARY

NORMAL CONDITION



Delta-Connected Motor
FLA = 10 Amperes

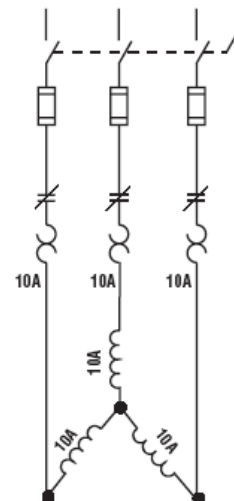
SINGLE-PHASING CONDITION



a)

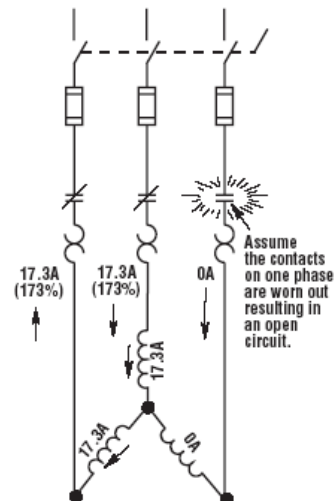
NORMAL CONDITION

WYE-Connected Motor



FLA = 10 Amperes

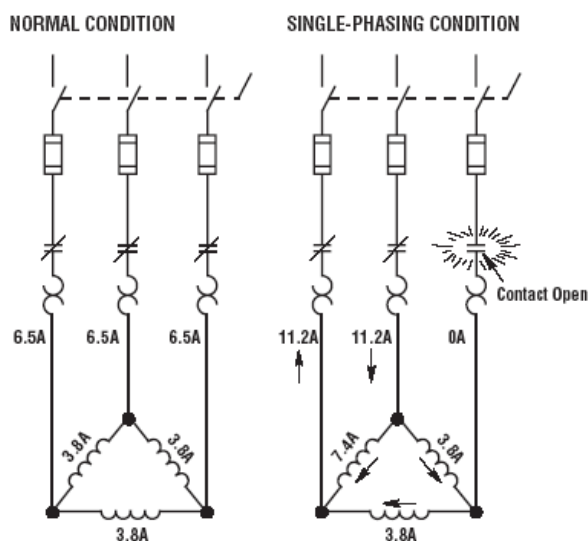
SINGLE-PHASING CONDITION



b)

FIGURA 2.9 – Desbalanço de corrente devido a abertura de uma das fases do secundário de um transformador. a) motor em delta b) motor em estrela.

SINGLE-PHASING ON SECONDARY



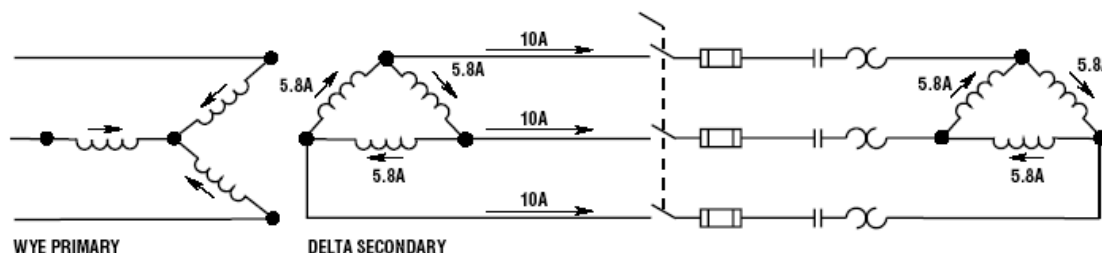
Delta-connected three-phase motor loaded to only 65% of its rated horsepower. Normal FLA = 10 amperes. Overload (overcurrent) protection should be based upon the motor's actual current draw for the underloaded situation for optimum protection. If load varies, overload protection is difficult to achieve. Temperature sensors, phase failure relays and current differential relays should be installed.

FIGURA 2.10 – Desbalanço de corrente devido a abertura de uma das fases do secundário de um transformador, considerando um motor em delta com carregamento de 65% da corrente nominal.

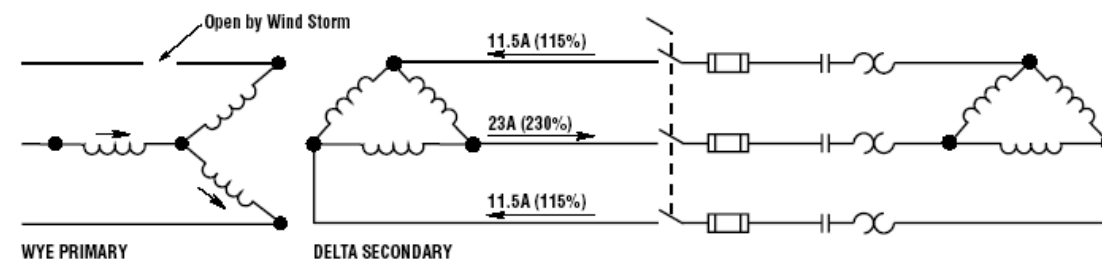
SINGLE-PHASING ON PRIMARY

Delta-Connected Motor; FLA = 10 Amperes

NORMAL CONDITION



SINGLE-PHASING CONDITION

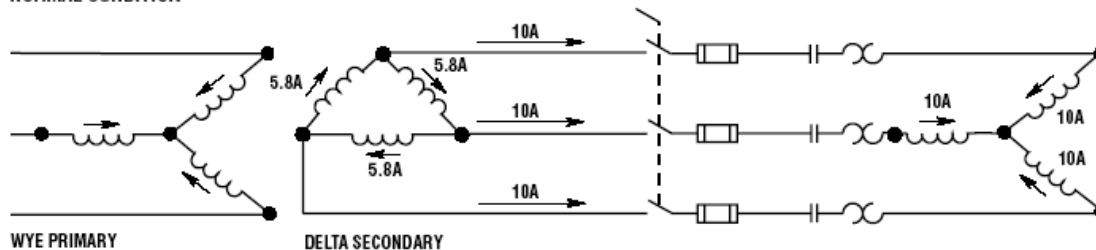


(Delta-Connected Motor) Diagram showing how the phase currents to a three-phase motor increase when a single-phasing occurs on the primary. For older installations where the motor is protected by two overload devices, the phase winding having the 230% current will burn up. However, properly sized overload relays or LOW-PEAK® or FUSETRON® dual-element, time-delay fuses will clear the motor from the power supply.

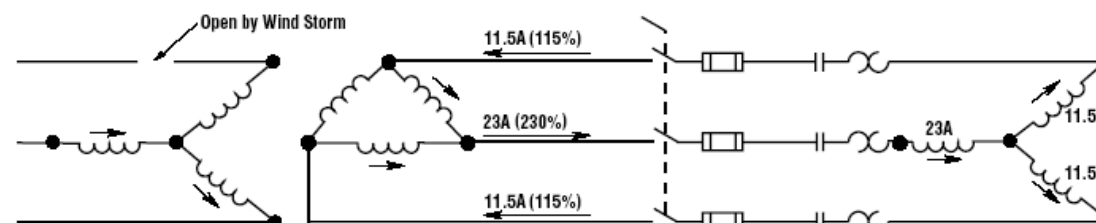
FIGURA 2.11 – Desbalanço de corrente devido a abertura de uma das fases do primário de um transformador para um motor conectado em delta.

SINGLE-PHASING ON PRIMARY
Wye-Connected Motor; FLA = 10 Amperes

NORMAL CONDITION



SINGLE-PHASING CONDITION



(Wye-Connected Motor) Diagram showing how the phase currents to a three-phase motor increase when a single-phasing occurs on the primary. For older installations where the motor is protected by two overload devices, the phase winding having the 230% current will burn up. However, properly sized overload relays or LOW-PEAK® or FUSETRON® dual-element, time-delay fuses, will clear the motor from the power supply.

FIGURA 2.12 – Desbalanço de corrente devido a abertura de uma das fases do primário de um transformador para um motor conectado em estrela.

2.3.2 Relés eletromecânicos

Estes são baseados na interação eletromagnética entre corrente e fluxo; e/ou na expansão de metais, devido ao aumento de temperatura provocado pela I_{cc} .

2.3.2.1 Relé tipo êmbolo

Neste tipo de relé existe somente uma grandeza atuante (dc ou ac), conforme Fig. 2.13.

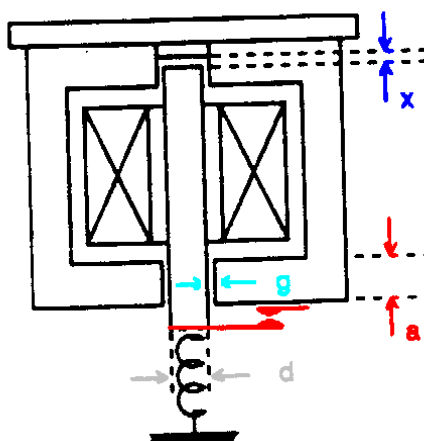


FIGURA 2.13 – Relé tipo êmbolo.

- F_s (força produzida pela mola);
- F_m (força que exercida para arrastar o êmbolo)
- $F_m > F_s \rightarrow$ movimento do êmbolo;
- O tempo de operação deste relé depende da massa do êmbolo;

- Característica do relé pode ser vista na Fig. 2.14. O eixo da abscissa é a razão entre a corrente medida e a I_{pickup} . O relé de alavanca apresenta características similares, mas a relação I_d/I_p é menor, apresentado, portanto, maior sensibilidade.

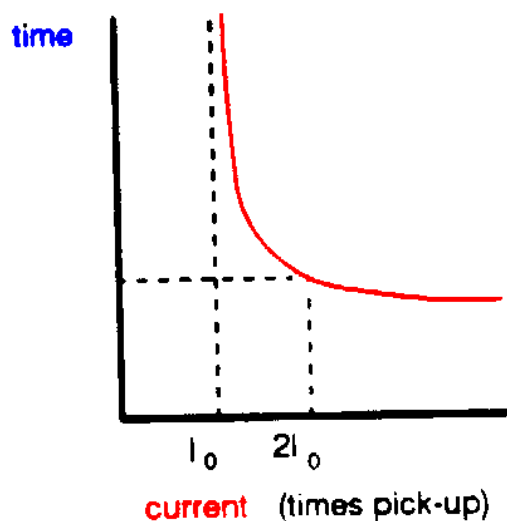


FIGURA 2.14 – Curva tempo corrente para um relé tipo êmbolo.

2.3.2.2 Relé tipo indução

Este é baseado no princípio de operação do motor ac. Logo, o relé não funciona com corrente dc. Na Fig. 2.15 pode-se perceber que são necessárias duas grandezas atuantes.

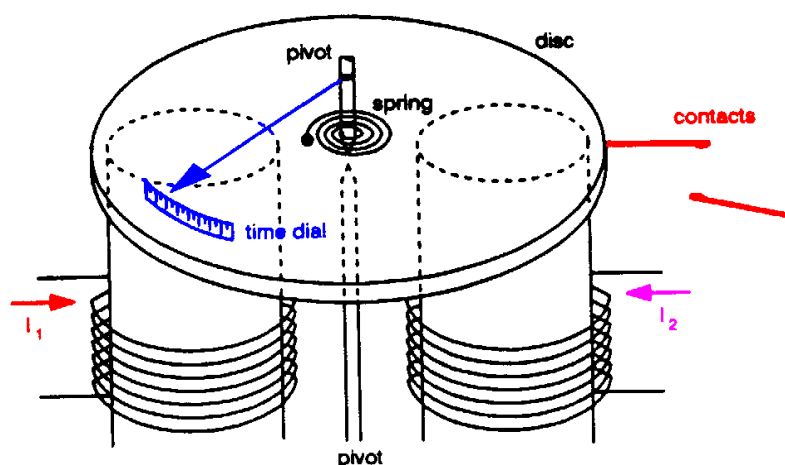
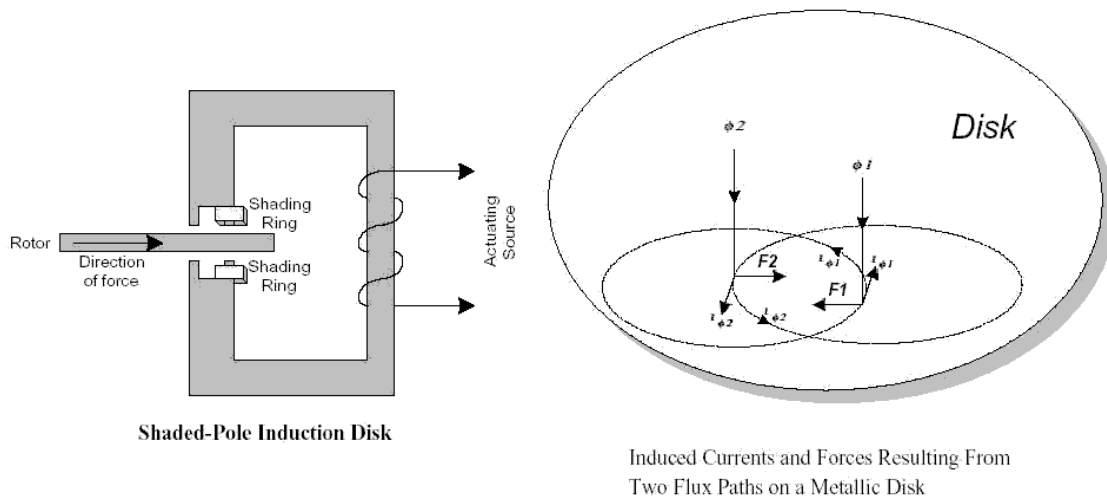


FIGURA 2.15 – Princípio de construção de relé tipo disco de indução.

Os 2 fluxos (duas grandezas) devem possuir diferença de fase entre si, caso contrário não há produção de torque. Pode ser usada uma bobina (anel) de sombreamento, conforme mostra a Fig. 2.16.



$$\begin{aligned}\phi 1 &= \Phi 1_M \sin(\omega t) \\ \phi 2 &= \Phi 2_M \sin(\omega t + \theta) \\ i_{\phi 1} &\propto \frac{d\phi 1}{dt} \propto \Phi 1_M \cos(\omega t) \\ i_{\phi 2} &\propto \frac{d\phi 2}{dt} \propto \Phi 2_M \cos(\omega t + \theta) \\ F &= F2 - F1 \propto (\phi 2 \cdot i_{\phi 1} - \phi 1 \cdot i_{\phi 2}) \\ F &\propto \Phi 1_M \Phi 2_M [\sin(\omega t + \theta) \cos(\omega t) - \cos(\omega t + \theta) \sin(\omega t)] \\ F &\propto \Phi 1_M \Phi 2_M \sin(\theta)\end{aligned}$$

FIGURA 2.16 – Bobina de sombreamento e equação de força para uma relé tipo disco de indução.

$$\tau = K \cdot I_{m1} \cdot I_{m2} \cdot \sin \theta$$

Onde:

θ - dif angular entre $i_1(t)$ e $i_2(t)$

I_m – valores máximos das I 's

Note que a direção do torque ocorre no sentido do enrolamento com corrente adiantada para aquele com corrente atrasada. Este pode funcionar como:

- Detector de nível;

4: EXEMPLO

A mesma corrente fluindo nos 2 enrolamentos, e providenciando um defasamento angular entre as correntes (Fig. 2.17). Assim, I e I_1 apresentam defasagem angular e a equação do torque fica:

$$\tau = K_1 \cdot I^2$$

Neste caso $\sin(\theta)$ é constante e já está incluído em K_1 .

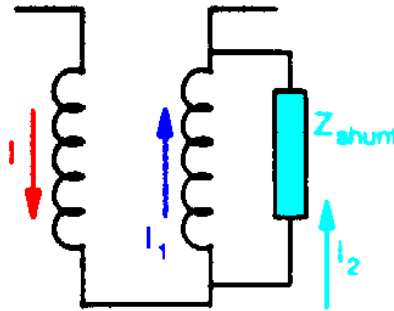


FIGURA 2.17 – Defasamento para produção de torque.

A curva característica para este relé é mostrada na Fig. 2.18.

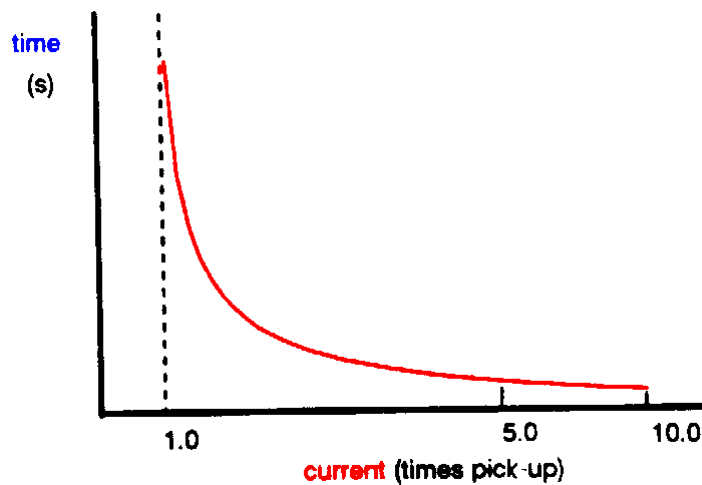


FIGURA 2.18 – Curva de tempo inverso para um relé tipo disco de indução.

- Comparador do ângulo de fase:
 - Neste caso é necessário um enrolamento com fonte de I e o outro com fonte de E.
 - $\phi \rightarrow$ â de projeto do relé
 - $I_d \approx I_p$
 - No enrolamento de tensão (TP) a I está atrasada da E no por um ângulo que é igual ao ângulo da Z do enrolamento de E. Se a diferença angular entre a E e I no enrolamento de V for igual a $-\phi$

$$\tau = V.I.\sin(\theta+\phi) = V.I.\sin(\alpha);$$

- Caso o relé seja energizado com fonte de E obtêm-se os relés de sub e sobretensão;
Por fim, combinado as diferentes grandezas de energização do relé chega-se a equação universal dos relés, ou seja:

$$\tau = \pm K_1.I^2 \pm K_2.V^2 \pm K_3.V.I.\sin(\theta+\phi) - K_4$$

$$\tau = \pm K_1.I^2 \pm K_2.V^2 \pm K_3.V.I.\cos(\theta-\tau) - K_4$$

Onde:

- K_1 – caracteriza uma unidade de sobrecorrente;
- K_2 – caracteriza uma unidade de sobretensão;
- K_1 e K_2 – caracteriza uma unidade de impedância;
- K_3 – caracteriza uma unidade direcional;
- K_4 – constante da mola.

5: EXEMPLO

- Considere $K_3 = 0$ e $K_4 = 0$ (o efeito da mola é desprezado)

No limiar de operação $\tau = 0$

Utilizando - K_2 (τ produzido pela E induzida será na direção contrária daquele produzido pela I)

$$|Z| = V/I = \sqrt{\left(\frac{K_1}{K_2}\right)}$$

Esta equação representa um círculo no plano R-X e define um relé de Z (ver Fig. 2.19a).

Polarizando a bobina de tensão com uma componente proporcional a corrente aplicada no relé introduz-se um deslocamento da característica do relé. Assim, pode-se acomodar melhor a resistência de arco elétrico.

$$0 = K_1 \cdot I^2 - K_2 \cdot (V + K_4 \cdot I)^2$$

$$|Z + K_4| = \sqrt{\left(\frac{K_1}{K_2}\right)}$$

- Considere $K_1, K_2, K_4 = 0$. Dividindo toda a expressão por I^2 , tem-se no limiar de operação:

$$Z \cdot \sin(\theta + \varphi) = 0$$

Esta equação define um relé direcional (ver Fig. 2.19b).

- Fazendo K_1 e $K_4 = 0$, e invertendo o sinal do τ produzido por VI, tem-se, no limiar de operação:

$$K_2 \cdot V^2 - K_3 \cdot V \cdot I \cdot \sin(\theta + \varphi) = 0$$

$$|Z| = K_3/K_2 \cdot \sin(\theta + \varphi)$$

Esta equação define um círculo passando pela origem com diâmetro K_3/K_2 , onde o diâmetro faz um ângulo $-\varphi$ com eixo X. Assim, tem-se um relé admitância (ver Fig. 2.19c).

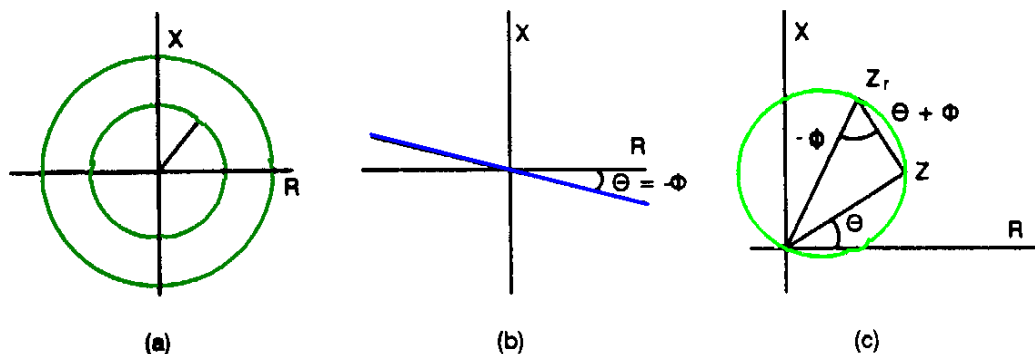


FIGURA 2.19 – Características de operação obtidas com a equação universal dos relés. (a) relé de impedância, (b) relé direcional, e (c) relé MHO.

2.3.3 Relé direcional

Foi visto que a equação do torque para este tipo de relé é:

$$\tau = V \cdot I \cdot \sin(\theta + \varphi) = V \cdot I \cdot \sin(\alpha);$$

Fazendo

$$\alpha = 90^\circ - r + \theta = 90^\circ - (r - \theta)$$

$$\tau = V \cdot I \cdot \sin(90^\circ - (r - \theta))$$

$$\tau = V \cdot I \cdot \cos(r - \theta)$$

Fica definido em função do â de máx torque e diferente angular entre I e V de polarização, o que mais comum (ver Fig.2.20).

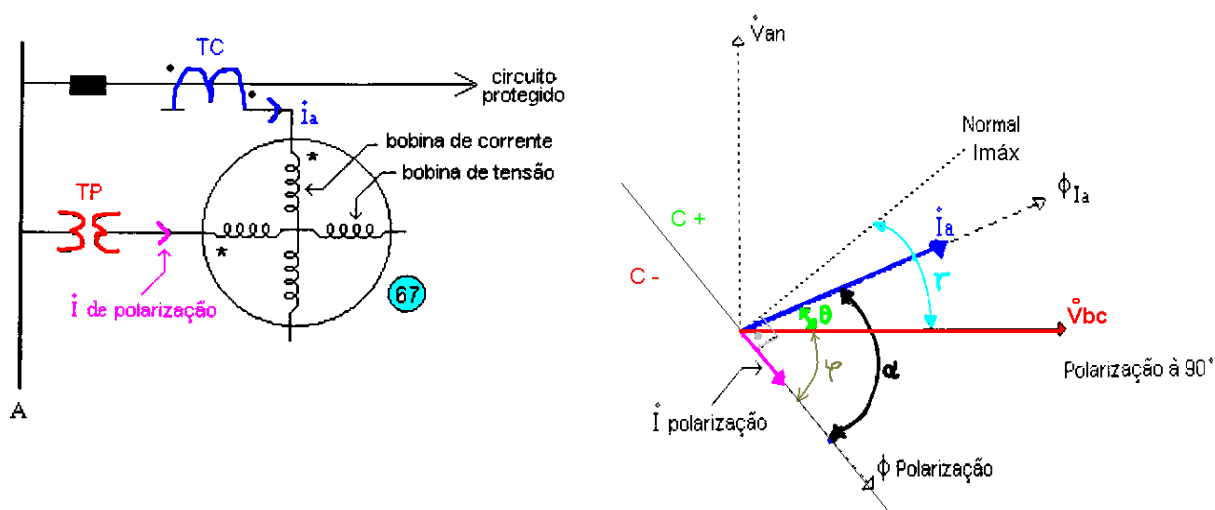


FIGURA 2.20 – (a) unidade direcional alimentada por TC e TP, (b) diagrama fasorial para torque máximo do relé direcional.

2.3.4 Relé de Z, X, MHO

2.3.4.1 Relé de Z

O princípio de operação do relé de Z é apresentado na Figura 2.21.

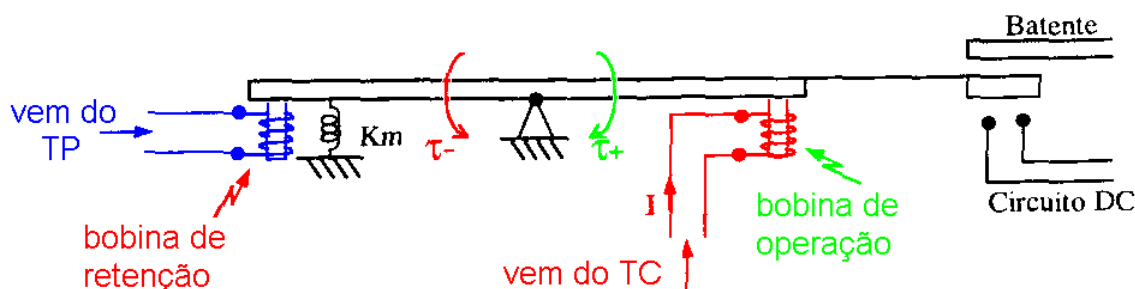


FIGURA 2.21 – Balança de torque para o relé de impedância.

$$\tau = K_1.I^2 + K_2.V^2 - K_m$$

No limiar de operação $\tau = 0$;

$$\left(\frac{V}{I}\right)^2 = \frac{K_1}{K_2} - \frac{K_m}{K_2.I^2}$$

No momento do defeito $\rightarrow \frac{K_m}{K_2.I^2} \cong 0$, pois I é grande.

$$Z = \sqrt{\frac{K_1}{K_2}} = \text{constante} = K$$

$$\dot{Z} = R + jX$$

$$Z^2 = R^2 + X^2$$

$$R^2 + X^2 = K^2 \rightarrow (R - R_0)^2 + (X - X_0)^2 = K^2$$

No diagrama R-X, a expressão representa uma circunferência com centro na origem e raio igual a K.

Este relé é não direcional, e por isto, normalmente utiliza-se o relé de 67 para monitorar o relé de Z (ver Fig. 2.22).

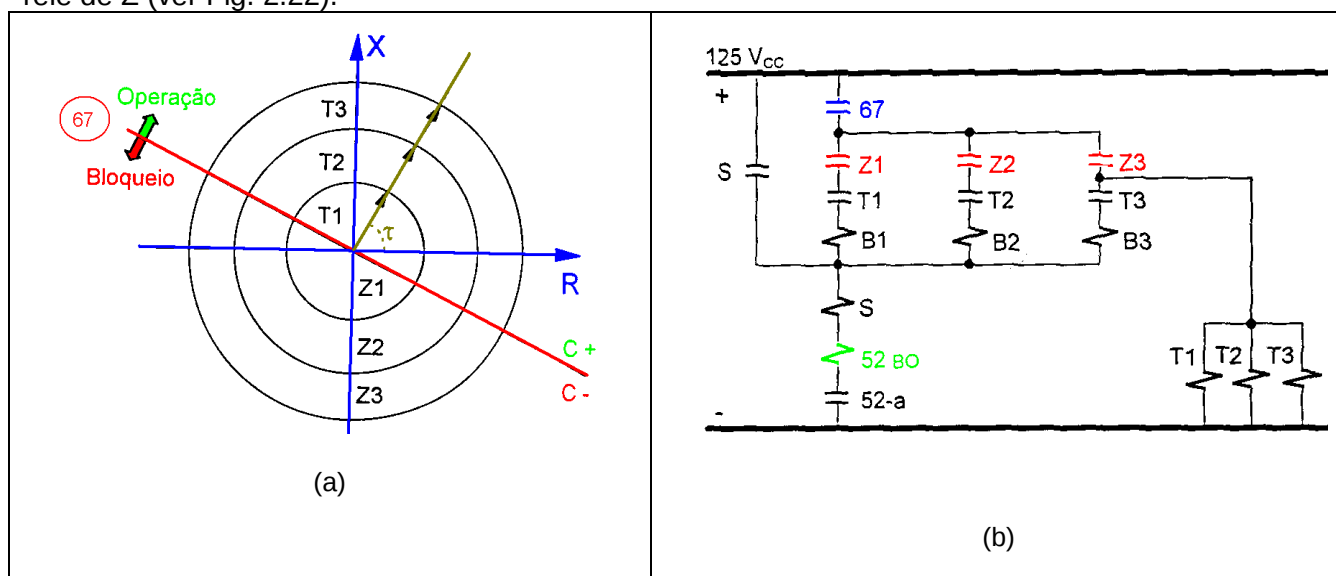


FIGURA 2.22 – (a) Característica de operação do relé de impedância monitorado pelo relé direcional, e (b) circuito de controle.

As zonas de proteção são, geralmente, ajustadas conforme mostra a Tabela 2.1.

TABELA 2.1 – Ajustes do relé de impedância.

Zona de proteção	% da linha	Temporização
Z1	80% da LT	Instantânea
Z2	100% da LT + 50% da LT adjacente	0,5 s
Z3	100% da LT + 100% da LT adjacente	1,0 s

2.3.4.2 Relé de admitância (MHO)

O torque motor deste relé é:

$$\tau = K_3.V.I.\cos(\theta-\tau)-K_2.V^2$$

Sendo que a I produz o torque de operação, e a V o torque de restrição.
No limiar de operação:

$$0 = K_3.V.I.\cos(\theta-\tau)-K_2.V^2$$

$$\frac{I}{E} \cos(\tau - \theta) = \frac{K_v}{K_d}$$

$$Y \cos(\tau - \theta) = \frac{K_v}{K_d}$$

$$Z = \frac{K_d}{K_v} \cos(\tau - \theta)$$

O lugar geométrico no diagrama R-X da impedância Z (Fig. 2.23) que satisfaz esta equação é uma circunferência que apresenta as seguintes características:

- Passa pela origem;
- Seu diâmetro vale $Z_{max} = K_d/K_v$;
- Diâmetro faz um ângulo τ com o eixo R;
- O centro é igual a $Z_{max}/2$.

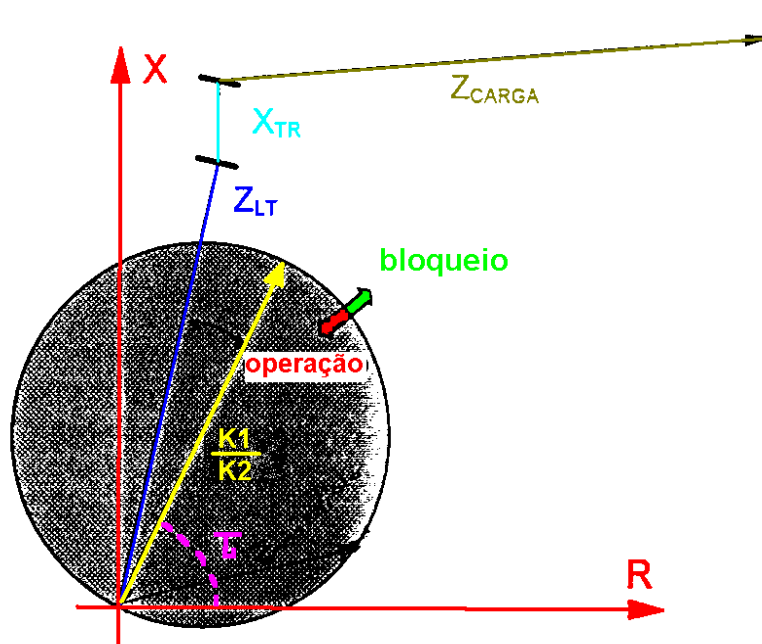
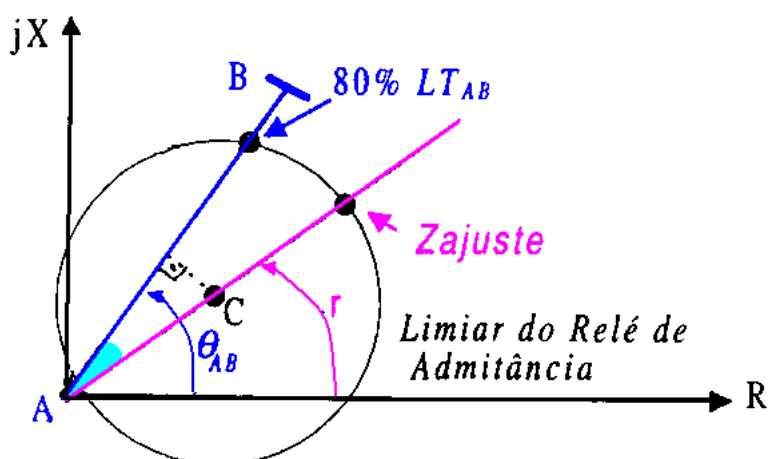


FIGURA 2.23 – Característica de operação do relé MHO, com a representação da linha, transformador e carga.

Características da unidade MHO:

- Inerentemente direcional;
- Ocupa menor área no plano R-X → adequado para LT longas de alta tensão, sujeitas a severas oscilações de potência;
- Pode fazer uma boa acomodação do arco voltaico por meio da inclinação de sua característica circular ($10-20^\circ$).
- Estas regulagens devem ser corrigidas, pois pode ocorrer que característica da inclinação da circunferência do limiar de operação do relé de admitância (o ângulo τ de máximo torque) não coincida com ângulo natural da impedância da linha de transmissão, a qual o relé está protegendo (Fig. 2.24).



$$\frac{Z_{80\%} \cdot LT_{AB}}{2} = \overline{CA} \cdot \cos(\theta_{AB} - \tau)$$

$$\frac{Z_{80\%} \cdot LT_{AB}}{2} = \frac{Z_{ajuste}}{2} \cdot \cos(\theta_{AB} - \tau)$$

$$Z_{ajuste} = \frac{Z_{80\%} \cdot LT_{AB}}{\cos(\theta_{AB} - \tau)}$$

FIGURA 2.24 – Correção do ajuste do relé MHO.

Os relés de distância podem ter um sub ou sobre-alcance:

Sub-alcance: a Z medida pelo relé > Z real, ou seja a característica circular encolhe, e o relé bloqueia quando deveria operar.

Prof. Ghendy Cardoso Junior

Sobre-alcance: a Z medida pelo relé < Z real, ou seja a característica circular aumenta, e o relé opera quando deveria bloquear

Os fatores que influem na performance dos relés de distância são:

- Oscilação de potência;
- Infeed / outfeed;
- Capacitância de compensação;
- Resistência do arco;
- Resistência de terra;
- Impedância mútua;
- Flata de transposição;
- Linhas multiterminais (devirações);
- Faltas muito próximas (tensão muito baixa);
- Impedância de falta elevada.

2.3.4.2.1 Efeito do arco elétrico no relé MHO

A resistência do arco elétrico pode ser calculada (valor aproximado) pela expressão de Warrington:

$$R_{\text{arco}} = \frac{8750 \cdot (s + u \cdot t)}{I^{1,4}} \Omega$$

Onde:

s – comprimento do arco (normalmente, distância ϕ - ϕ ou ϕ -terra – comprimento da cadeia de isoladores), em pés;

u – velocidade do vento em milhas por hora

t - tempo de fata ocorrido (tempo em segundos desde o instante de escorvamento do arco)

I – a corrente rms de curto-circuito, em A.

6: EXEMPLO

Considere uma linha radial de 69 kV, com 30 milhas de comprimento e espaçamento entre condutores de 10 pés. A impedância da linha $Z_L = 11 + j22 \Omega$; e do sistema $Z_s = 0 + j25 \Omega$.

$$Z_{\text{total}} = 11 + j47 \Omega = 48,27 \angle 76,83^\circ$$

Defeito no final da linha:

$$I = \frac{69000}{48,3\sqrt{3}} = 825,3 \text{ A}$$

$$R_{\text{arc}} = \frac{8750 \cdot (10)}{(825,3)^{1,4}} = 7,2 \Omega$$

Defeito no início da linha:

$$I = \frac{69000}{25,0\sqrt{3}} = 1593,5 \text{ A}$$

$$R_{\text{arc}} = \frac{8750 \cdot (10)}{(1593,5)^{1,4}} = 2,9 \Omega$$

Note que neste caso a R_{arc} é aproximadamente 2,5 vezes maior no final da linha em relação ao início da mesma, devido a I_{cc} . Em linhas extremamente longas esta diferença pode ser ainda maior, principalmente se a impedância da fonte for pequena.

Não é uma boa opção aceitar a redução no alcance da Z2 para falta no final da linha protegida devido a resitência de falta, já que isto implicaria em atuação da proteção em T3.

2.3.4.3 Relé de X

Este relé opera somente com sensibilidade na reatância do sistema, sendo seu torque motor dado por:

$$\tau = K_1 \cdot I^2 - K_3 \cdot V \cdot I \cdot \cos(\theta - \tau)$$

Para $\tau = 90^\circ$ (Fig. 2.25a)

$$\tau = K_1 \cdot I^2 - K_3 \cdot V \cdot I \cdot \sin(\theta)$$

$$\frac{E}{I} \sin\theta = \frac{K_1}{K_E} - \frac{K}{K_E I^2}$$

$$\frac{E}{I} \sin\theta = \frac{K_1}{K_E}$$

$$Z \cdot \sin\theta = \frac{K_1}{K_E} \rightarrow \dot{Z} = Z \cdot \cos\theta + jZ \cdot \sin\theta = R + jX$$

$$X = \frac{K_1}{K_E}$$

Podem-se conseguir inclinações diferentes para a reta, fazendo o ângulo de máximo torque diferente de 90° , conforme mostra a Figura 2.25b.

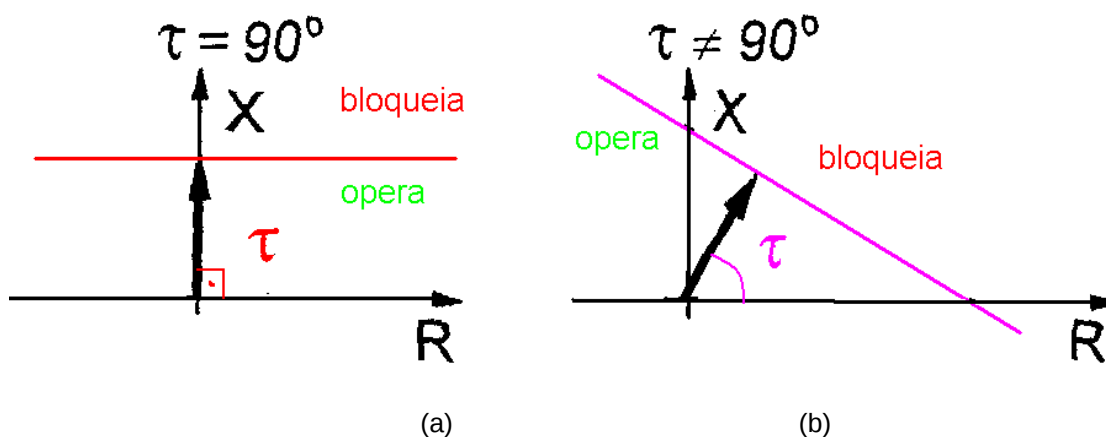


FIGURA 2.25 – (a) Relé de reatância com ângulo de máximo torque de 90° , e (b) com ângulo de máximo torque diferente de 90° (no caso, menor que 90°).

Note que a característica do relé de reatância é aberta (Fig. 2.26a), sendo bastante sensível às oscilações de potência. Por outro lado, é imune aos efeitos dos arcos voltaicos, já que estes são predominantemente resistivos.

Este tipo de relé é adequado para linhas curtas, e de tensões não muito altas.

A Figura 2.26b compara o relé de impedância com o de reatância.

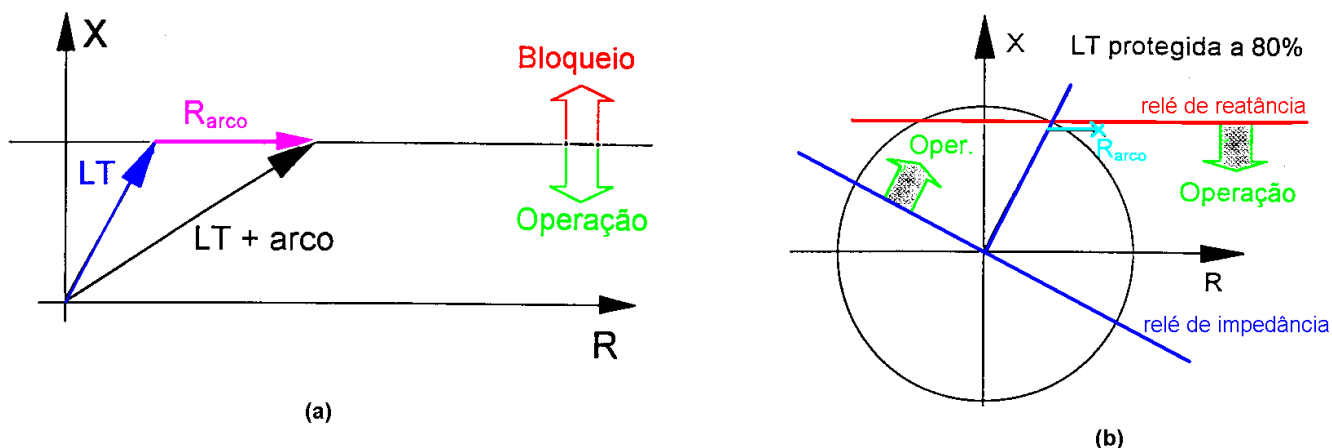


FIGURA 2.26 – (a) Efeito da resistência de arco no relé de reatância, e (b) comparação do efeito da resistência de arco no relé de impedância e reatância.

Como o relé de reatância só vê reatância, isto pode causar atuação indevida quando a carga tiver qualquer fator de potência capacitivo ou elevado fator de potência indutivo. Por esse motivo o relé de reatância deve operar juntamente com um relé de admitância, ajustado apenas em uma zona, conforme mostra a figura 2.27.

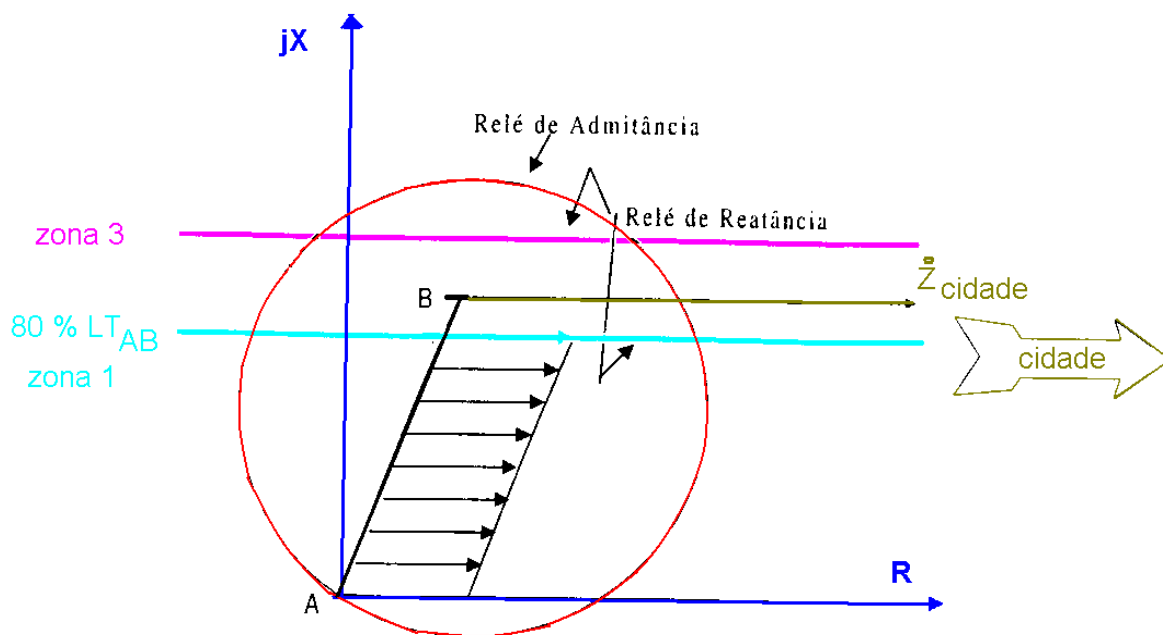


FIGURA 2.27 – Relé de reatância com supervisão do relé MHO.

2.3.5 Relés poligonais

São representados por retas no plano R-X formadas por unidades direcionais e unidades de reatância com $\tau \neq 90^\circ$, conforme mostra a Figura 2.28.

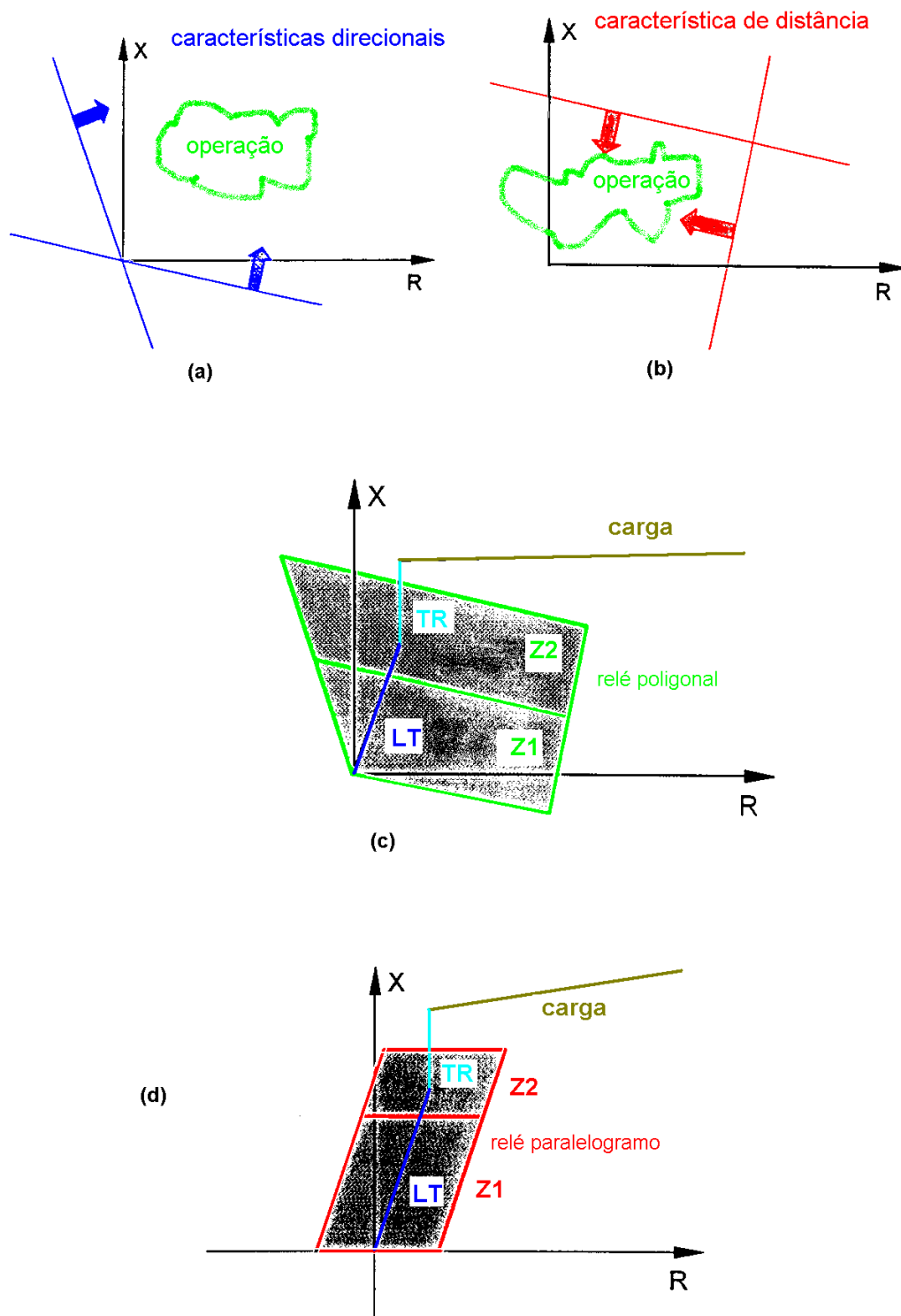


FIGURA 2.28 – (a) Característica direcional, (b) característica de distância, (c) relé poligonal, e (d) relé paralelogramo.

2.3.6 Relés estáticos (Unidades de Estado Sólido)

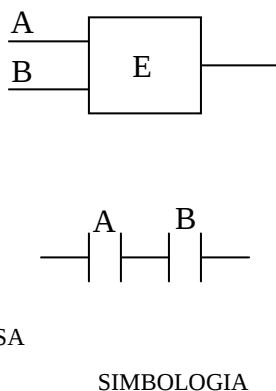
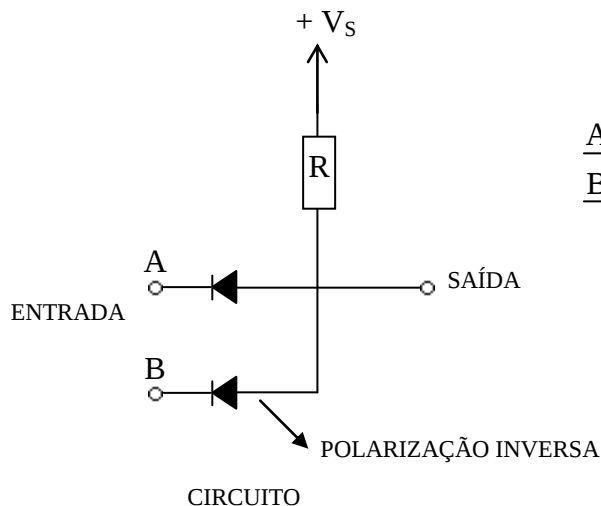
São relés cujos componentes principais são diodos, transistores e tiristores acoplados a resistores e capacitores.

Os tipos de relés mais comuns são os de distância, sobrecorrente instantâneo, temporizado e direcional, relés de tensão e também os relés de múltiplas funções para proteção de motores e geradores.

Estes relés utilizam como princípio de operação as principais grandezas lógicas que são:

2.3.6.1 Unidade “E” (AND)

O elemento “E” mais simples consiste de diodos e resistores, conforme abaixo:

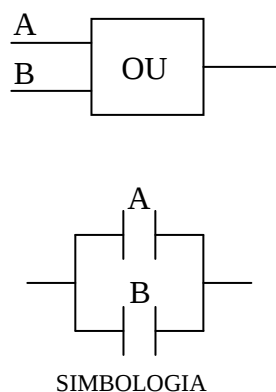
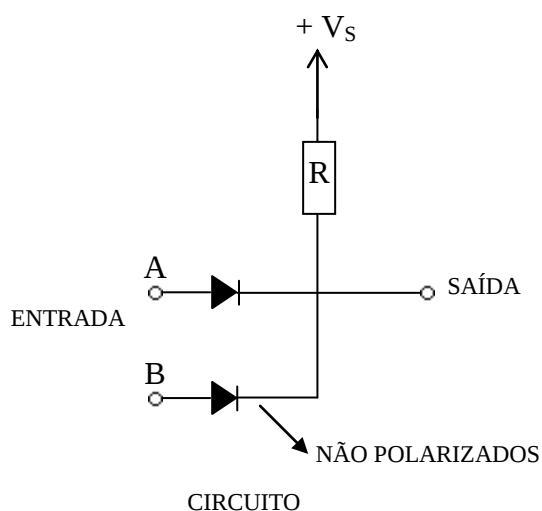


ENTRADA		SAÍDA
A	B	
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

TABELA LÓGICA

O princípio de operação consiste em se colocar dois diodos com polarização inversa paralelos com o terminal de saída. Logo, somente haverá sinal de saída quando os dois diodos forem polarizados ao mesmo tempo.

2.3.6.2 Unidade “OU” (OR)

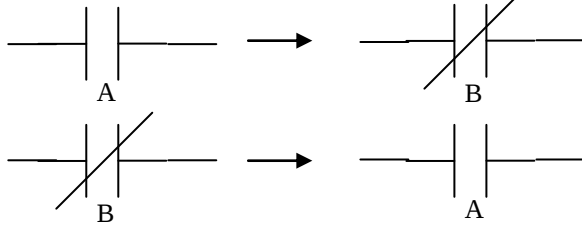


ENTRADA		SAÍDA
A	B	
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

TABELA LÓGICA

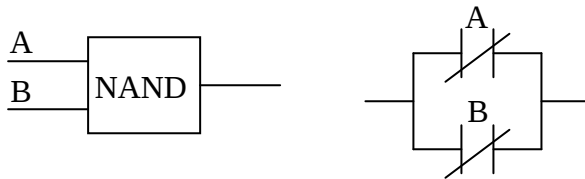
2.3.6.3 Unidade “NÃO” (NOT)

Esta unidade normalmente é combinada com outras unidades para obter um dado sinal de resposta invertido.



2.3.6.4 Unidade NAND

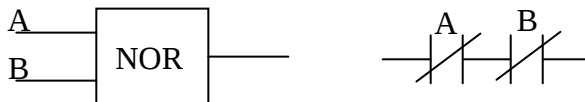
É a negação da unidade AND.



ENT		SAÍDA
A	B	
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

2.3.6.5 Unidade NOR

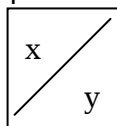
É a negação da unidade OR.



ENT		SAÍDA
A	B	
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

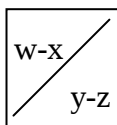
2.3.6.6 Unidades Temporizadas

São unidades utilizadas para fornecer uma temporização na partida ou parada de um determinado dispositivo de proteção e/ou controle.



$x \Rightarrow$ representa uma unidade com retardo de *pick-up*

$y \Rightarrow$ representa uma unidade com retardo de *drop-out*



$\left. \begin{matrix} w-x \\ y-z \end{matrix} \right\}$ faixa de ajuste

Características das unidades estáticas:

- Melhor performance;
- Todas as funções e características dos relés eletromecânicos podem ser realizadas;
- Limitações a temperaturas extremas, umidade, sobrecorrente e sobretensão (SE ambiente hostil);
- Requer fonte independente;
- mais preciso (ajustes com pequena tolerância) e mais compacto;
- Flexibilidade no ajuste de sua forma característica (cargas pesadas, configurações não usuais);
- Não são afetados por vibração ou poeira;
- É composto por um circuito analógico (sensor de falta e circuito de medição) juntamente com um circuito digital (variáveis lógicas), conforme mostra a Fig. 2.29.

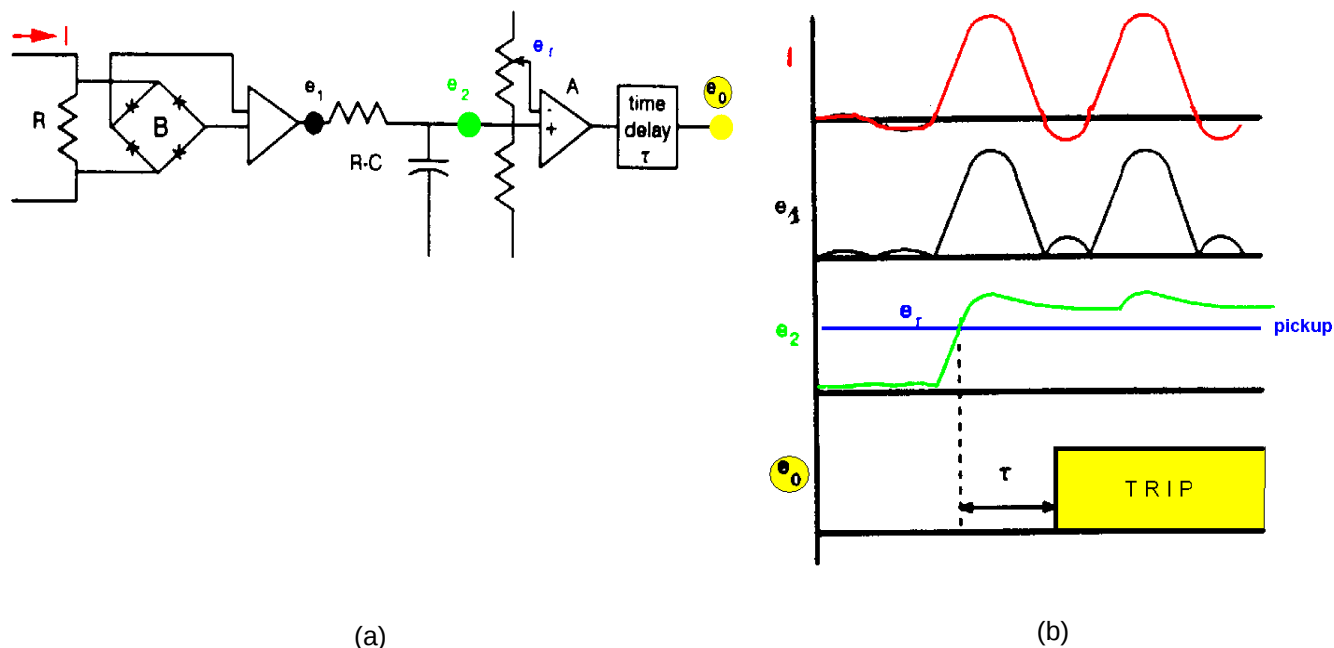


FIGURA 2.29 – (a) Circuito de um relé estático de sobrecorrente instantâneo, e (b) formas de onda.

- Filtro R-C → remove o *ripple* (ondulação)
- A → amplificador (alto ganho);
- E_r → tensão de referência (ajuste de *pickup*);
- Quando a entrada do terminal positivo do amplificador se torna $> e_r \rightarrow$ a saída de A ↑;
- Este instante de mudança ocorre com certo atraso de tempo, de modo a proporcionar imunidade com relação a sinais transitórios falsos.
- O circuito da Fig. 2.29 pode ser utilizado para se obter um relé de sobrecorrente temporizado.

2.3.6.7 MHO estático

$$Z = (K_3/K_2) \cdot \sin(\theta + \phi);$$

Onde, (K_3/K_2) são as constantes de projeto. Substituindo (K_3/K_2) por Z_r , tem-se:

$$Z = Z_r \cdot \sin(\theta + \phi); \quad (* I)$$

$$E - I \cdot Z_r \cdot \sin(\theta + \phi) = 0$$

A Fig. 2.30 mostra o princípio de funcionamento de um relé estático.

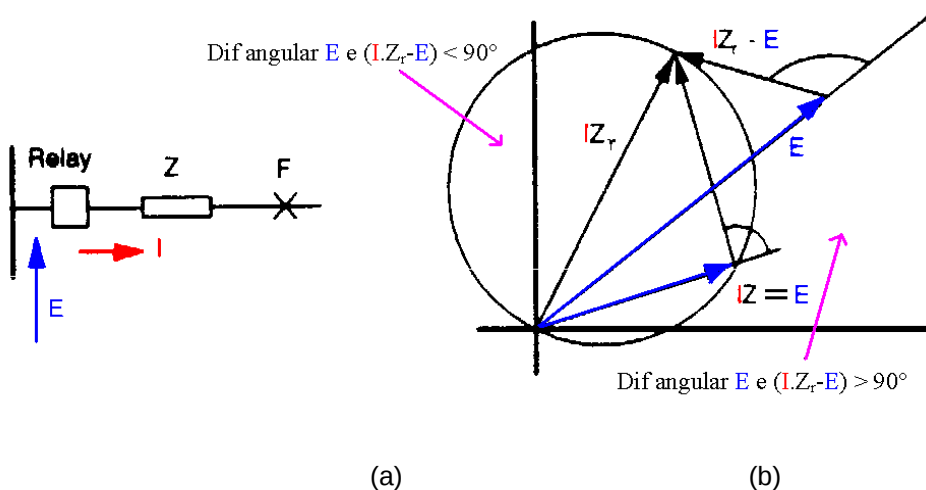


FIGURA 2.30 – (a) Proteção de distância de uma linha, e (b) diagrama de fasores par um relé MHO estático.

Logo, um circuito analógico pode ser desenvolvido para medir o ângulo entre duas formas de onda, conforme mostra a Fig. 2.31.

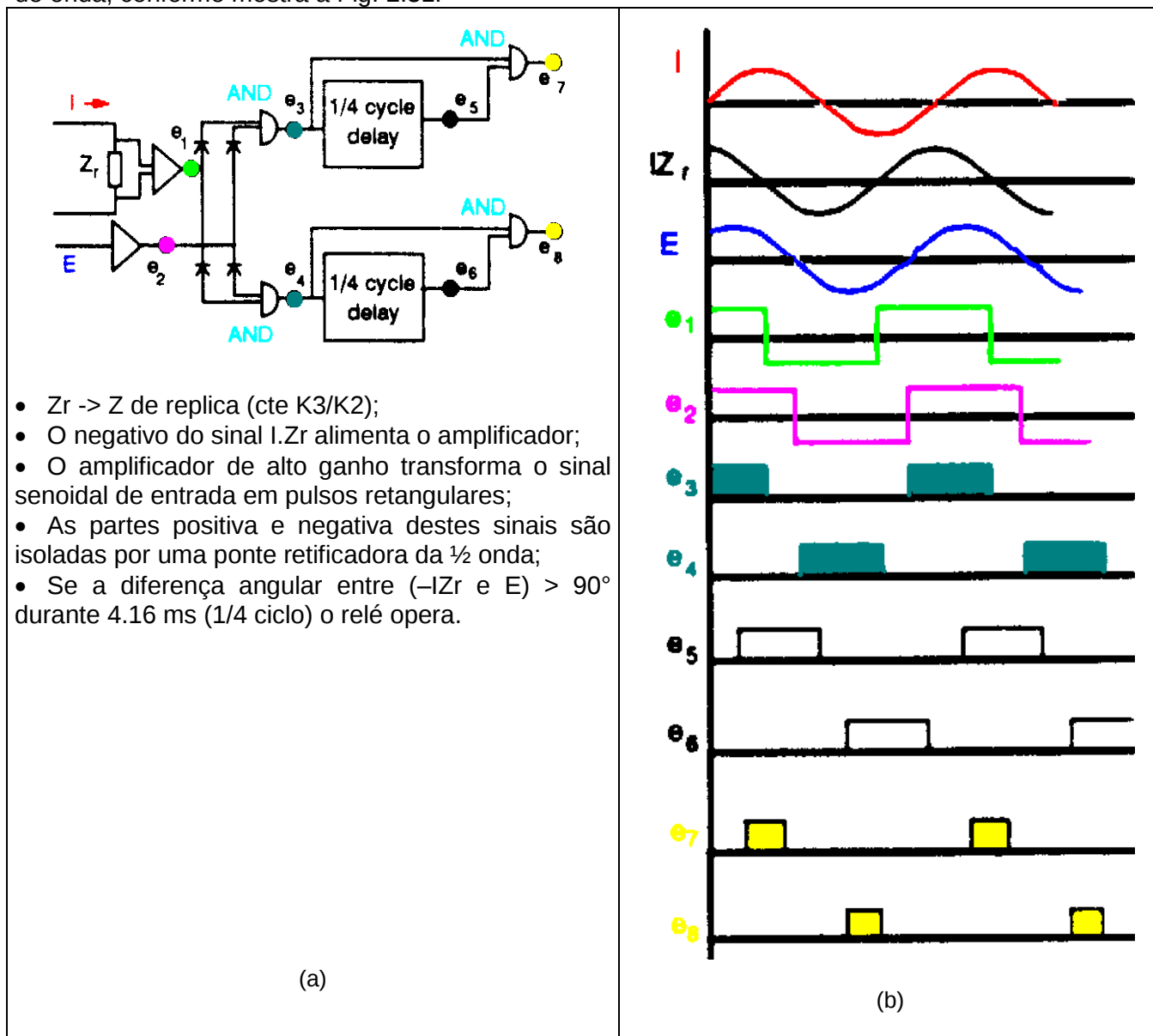


FIGURA 2.31 – (a) Circuito eletrônico de um relé MHO, e (b) formas de onda.

2.3.7 Relé microprocessado

- Toma decisão a partir de sinais analógicos digitalizados;
- Pode executar as mesmas funções dos relés eletromecânicos e estáticos;
- Necessidade de se obter uma representação digital dos parâmetros de I e E ;
- Algoritmos de filtragem digital;

Os principais componentes de um relé microprocessado são apresentados na Fig. 2.32.

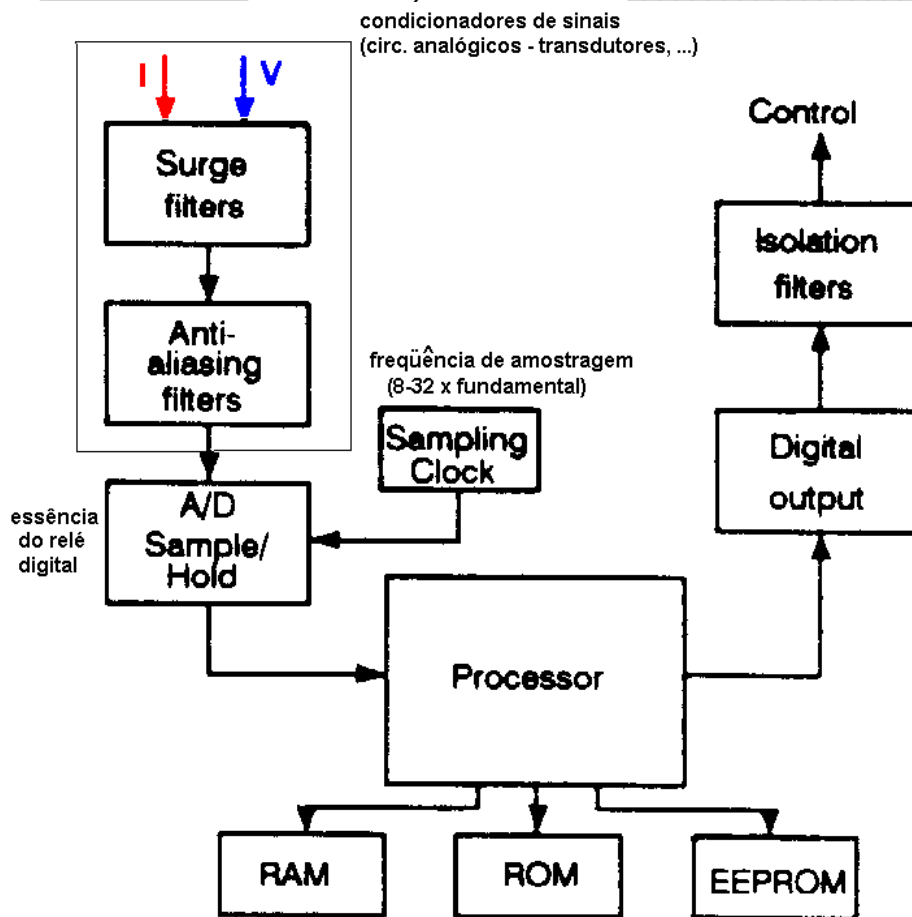


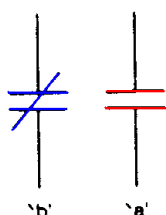
FIGURA 2.32 – Principais funções de um relé microprocessado.

- A maior vantagem é o autodiagnóstico (também é possível nos relés estáticos);
- Podem ser utilizados meios de comunicação
 - Alerta o operador caso algo não esteja funcionando corretamente;
 - Permite diagnóstico e possíveis correções remotas;
 - Leitura local ou remota de seus ajustes.
- Relés adaptativos (em tempo real de acordo com as mudanças do sistema - ajuste local ou remoto);
- Problemas
 - Qual é o efeito da mistura de relés digitais e estáticos num mesmo esquema de proteção;
 - Padronização das interfaces dos relés digitais (integração entre vários fabricantes).

2.4 Definições básicas para relés

2.4.1 Definição de contatos

Os contatos da Fig. 2.33 são mostrados com o relé desenergizado, ou seja, na posição de descanso/desenergizado (*on-the-shelf*).



2.4.2 Bandeirola (Target)

É uma indicação de que o relé operou para abrir um disjuntor. Ela é usada para o *reset* do relé de forma a estar pronto para a próxima operação.

No relé eletromecânico, tem-se uma indicação mecânica (bandeirola) ativada pela corrente de trip;

Nos relés estáticos e digitais tem-se um sinal sonoro ou luminoso.

2.4.3 Unidade de selo

É um relé auxiliar (dispositivo eletromecânico), conforme mostrado na Fig. 2.34. Os contatos do relé principal fazem parte do projeto do relé, e não são projetados para interromper a corrente de energização da bobina do disjuntor (corrente de trip). Portanto, estes devem ser protegidos por um dispositivo eletromagnético que apresenta as seguintes características:

- Uma grande área de contato de fechamento;
- Pressão boa nos contatos de fechamento;
- Uma pequena remanência na sua abertura, após o desligamento do disjuntor.

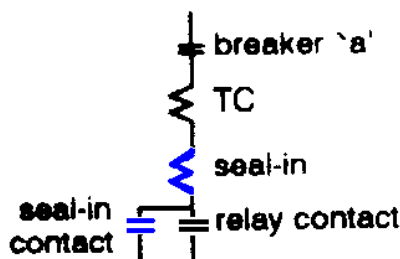


FIGURA 2.34 – Unidade de selo.

2.4.4 Tempo de operação

Pode fazer parte do dispositivo de proteção, como ocorre com os fusíveis, e relés de sobrecorrente de tempo inverso; como também podem ser incorporados aos relés, por meio de temporizadores pneumático, a óleo e eletrônico (Fig. 2.35).

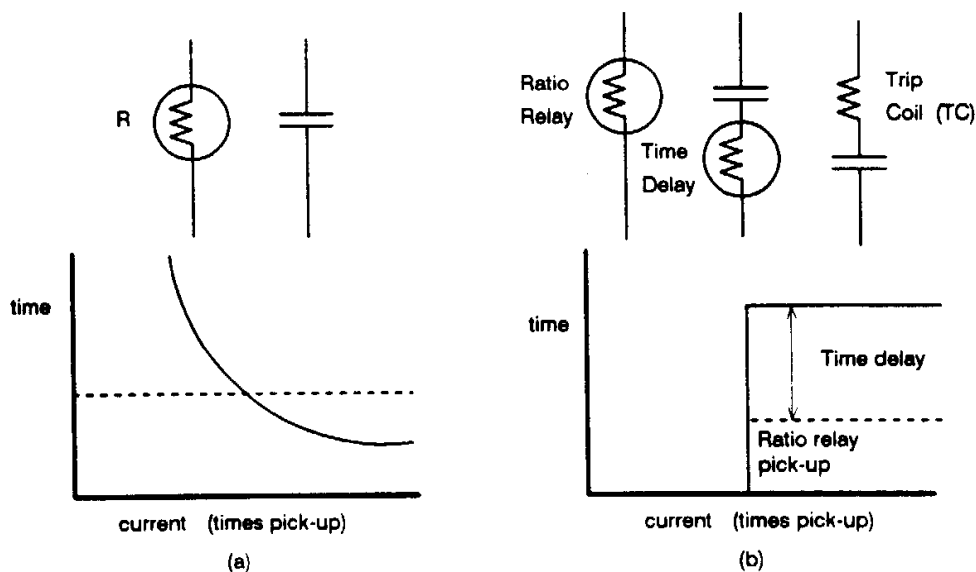


FIGURA 2.35 – Relés temporizadores. (a) relé com temporização inerente, e (b) temporização adicionada por um relé externo.

2.4.5 Razão pickup e reset

A existência de uma grande diferença entre a I_{pickup} e $I_{dropout}$ afeta a aplicação de determinados relés. Quando $I_{dropout}$ é uma pequena porcentagem da I_{pickup} , então a anormalidade causa a operação do relé, mas o retorno de uma condição normal do sistema pode não resetar o relé imediatamente.

- Operação (ou seja, o relé opera) → o relé fecha seus contatos.
- Desoperação (ou seja, o relé desopera) → o relé abre seus contatos.
- *Pickup* → quando o relé opera para abrir um contato “tipo b” ou para fechar um contato “tipo a”.
- *Reset* → Quando um relé desopera fechando um contato “tipo b”.
- *Dropout* → Quando um relé desopera abrindo um contato “tipo a”.
 - Logo:
 - Abrir um contato “tipo a” => tenho $I_{dropout}$.
 - Fechar um contato “tipo b” => tenho I_{resets} .

2.4.6 Circuitos de controle

A Fig. 2.36 mostra um circuito de controle dc simplificado, lembre que os contatos são mostrados para o relé na posição de descanso.

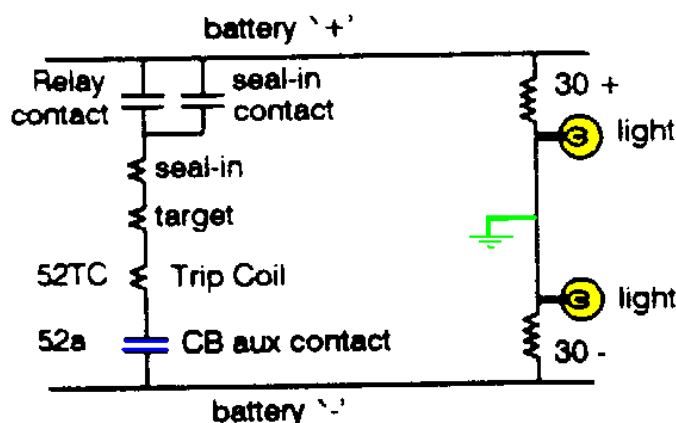


FIGURA 2.36 – Circuito de controle e de teste para detecção de falha para terra.

Note que os circuitos dc são isolados da terra. Portanto o relé 30 (emite sinal sonoro) mais um indicativo luminoso são utilizados para indicar a ocorrência de um terra acidental do banco de baterias, ou seja:

- Na condição normal do circuito dc as lâmpadas apresentam $\frac{1}{2}$ do brilho (mesmo brilho);
 - Na ocorrência de uma fuga para a terra:
 - A lâmpada associada ao terminal aterrado se apaga;
 - A outra brilha com muita intensidade;
 - Terra acidental com R_f , uma lâmpada brilha mais que a outra;
- Deve-se, portanto, evitar qualquer tipo de terra acidental, já que dois pontos ligados à terra põem o banco de bateria em curto-circuito.

O contato 52a é conectado ao terminal negativo para evitar corrosão por ação eletrolítica no terminal positivo da bobina de disparo do disjuntor (52TC).

MATHEMATICS

STRAIGHT LINE

The general form of the equation is

$$Ax + By + C = 0$$

The standard form of the equation is

$$y = mx + b,$$

which is also known as the *slope-intercept* form.

The *point-slope* form is $y - y_1 = m(x - x_1)$

Given two points: slope, $m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$

The angle between lines with slopes m_1 and m_2 is

$$\alpha = \arctan [(m_2 - m_1)/(1 + m_2 m_1)]$$

Two lines are perpendicular if $m_1 = -1/m_2$

The distance between two points is

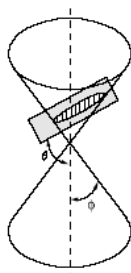
$$d = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$$

QUADRATIC EQUATION

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\text{Roots} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

CONIC SECTIONS

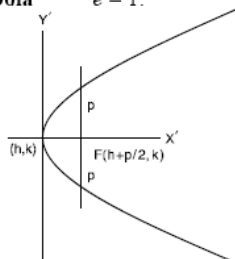


$$e = \text{eccentricity} = \cos \theta / (\cos \phi)$$

[Note: X' and Y' , in the following cases, are translated axes.]

Case 1. Parabola $e = 1$:

•

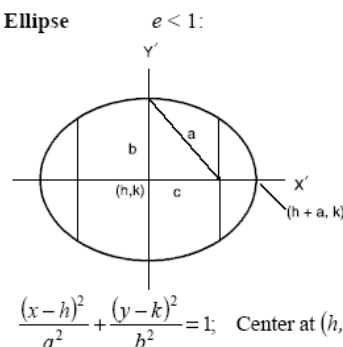


$$(y - k)^2 = 2p(x - h); \text{ Center at } (h, k)$$

is the standard form of the equation. When $h = k = 0$,
Focus: $(p/2, 0)$; Directrix: $x = -p/2$

Case 2. Ellipse $e < 1$:

•



$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1; \text{ Center at } (h, k)$$

is the standard form of the equation. When $h = k = 0$,

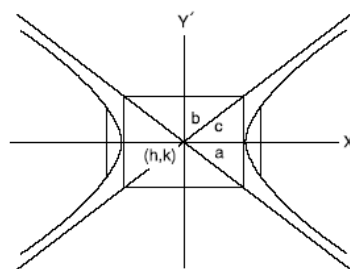
Eccentricity: $e = \sqrt{1 - (b^2/a^2)} = c/a$

$$b = a\sqrt{1 - e^2};$$

Focus: $(\pm ae, 0)$; Directrix $x = \pm a/e$

Case 3. Hyperbola $e > 1$:

•



$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1; \text{ Center at } (h, k)$$

is the standard form of the equation. When $h = k = 0$,

Eccentricity: $e = \sqrt{1 + (b^2/a^2)} = c/a$

$$b = a\sqrt{e^2 - 1};$$

Focus: $(\pm ae, 0)$; Directrix $x = \pm a/e$

• ©Brink, R.W., *A First Year of College Mathematics*, Copyright © 1937 by D. Appleton-Century Co., Inc. Reprinted by permission of Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ.

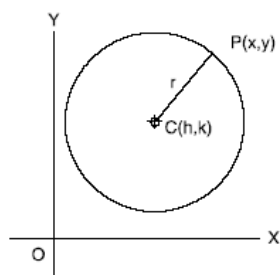
Case 4. Circle $e = 0$:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2, \quad \text{Center at } (h, k)$$

is the general form of the equation with radius

$$r = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$$

•

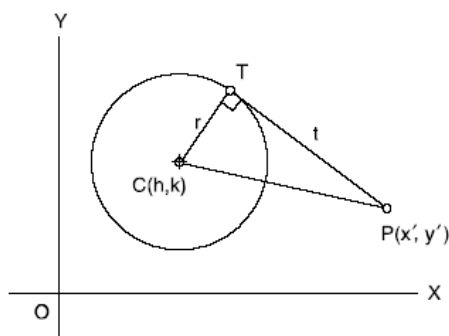


Length of the tangent from a point. Using the general form of the equation of a circle, the length of the tangent is found from

$$t^2 = (x'-h)^2 + (y'-k)^2 - r^2$$

by substituting the coordinates of a point $P(x', y')$ and the coordinates of the center of the circle into the equation and computing.

•



Conic Section Equation

The general form of the conic section equation is

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

where not both A and C are zero.

If $B^2 - AC < 0$, an *ellipse* is defined.

If $B^2 - AC > 0$, a *hyperbola* is defined.

If $B^2 - AC = 0$, the conic is a *parabola*.

If $A = C$ and $B = 0$, a *circle* is defined.

If $A = B = C = 0$, a *straight line* is defined.

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$$

is the normal form of the conic section equation, if that conic section has a principal axis parallel to a coordinate axis.

$$h = -a, k = -b$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$$

If $a^2 + b^2 - c$ is positive, a *circle*, center $(-a, -b)$.

If $a^2 + b^2 - c$ equals zero, a *point* at $(-a, -b)$.

If $a^2 + b^2 - c$ is negative, locus is *imaginary*.

QUADRIC SURFACE (SPHERE)

The general form of the equation is

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-m)^2 = r^2$$

with center at (h, k, m) .

In a three-dimensional space, the distance between two points is

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

LOGARITHMS

The logarithm of x to the Base b is defined by

$$\log_b(x) = c, \text{ where } b^c = x$$

Special definitions for $b = e$ or $b = 10$ are:

$$\ln x, \text{ Base } = e$$

$$\log x, \text{ Base } = 10$$

To change from one Base to another:

$$\log_b x = (\log_a x) / (\log_a b)$$

e.g., $\ln x = (\log_{10} x) / (\log_{10} e) = 2.302585 (\log_{10} x)$

Identities

$$\log_b b^n = n$$

$$\log x^c = c \log x; x^c = \text{antilog } (c \log x)$$

$$\log xy = \log x + \log y$$

$$\log_b b = 1; \log 1 = 0$$

$$\log x/y = \log x - \log y$$

• Brink, R.W., *A First Year of College Mathematics*, Copyright © 1937 by D. Appleton-Century Co., Inc. Reprinted by permission of Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ.

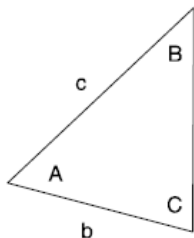
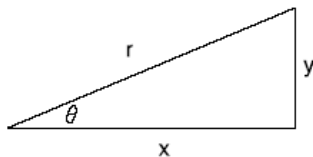
TRIGONOMETRY

Trigonometric functions are defined using a right triangle.

$$\sin \theta = y/r, \cos \theta = x/r$$

$$\tan \theta = y/x, \cot \theta = x/y$$

$$\csc \theta = r/y, \sec \theta = r/x$$



Law of Sines $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

Law of Cosines

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Identities

$$\csc \theta = 1/\sin \theta$$

$$\sec \theta = 1/\cos \theta$$

$$\tan \theta = \sin \theta / \cos \theta$$

$$\cot \theta = 1/\tan \theta$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$$

$$\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\tan 2\alpha = (2 \tan \alpha) / (1 - \tan^2 \alpha)$$

$$\cot 2\alpha = (\cot^2 \alpha - 1) / (2 \cot \alpha)$$

$$\tan(\alpha + \beta) = (\tan \alpha + \tan \beta) / (1 - \tan \alpha \tan \beta)$$

$$\cot(\alpha + \beta) = (\cot \alpha \cot \beta - 1) / (\cot \alpha + \cot \beta)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha - \beta) = (\tan \alpha - \tan \beta) / (1 + \tan \alpha \tan \beta)$$

$$\cot(\alpha - \beta) = (\cot \alpha \cot \beta + 1) / (\cot \beta - \cot \alpha)$$

$$\sin(\alpha/2) = \pm \sqrt{(1 - \cos \alpha)/2}$$

$$\cos(\alpha/2) = \pm \sqrt{(1 + \cos \alpha)/2}$$

$$\tan(\alpha/2) = \pm \sqrt{(1 - \cos \alpha)/(1 + \cos \alpha)}$$

$$\cot(\alpha/2) = \pm \sqrt{(1 + \cos \alpha)/(1 - \cos \alpha)}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = (1/2)[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = (1/2)[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin \alpha \cos \beta = (1/2)[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin(1/2)(\alpha + \beta) \cos(1/2)(\alpha - \beta)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos(1/2)(\alpha + \beta) \sin(1/2)(\alpha - \beta)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos(1/2)(\alpha + \beta) \cos(1/2)(\alpha - \beta)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin(1/2)(\alpha + \beta) \sin(1/2)(\alpha - \beta)$$

COMPLEX NUMBERS

Definition $i = \sqrt{-1}$

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

$$(a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d)$$

$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2}$$

$$(a + ib) + (a - ib) = 2a$$

$$(a + ib) - (a - ib) = 2ib$$

$$(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$$

Polar Coordinates

$$x = r \cos \theta; y = r \sin \theta; \theta = \arctan(y/x)$$

$$r = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$$

$$[r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)][r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)] =$$

$$r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$(x + iy)^n = [r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n$$

$$= r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

$$\frac{r_1(\cos \theta + i \sin \theta)}{r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

Euler's Identity

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Roots

If k is any positive integer, any complex number (other than zero) has k distinct roots. The k roots of $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ can be found by substituting successively $n = 0, 1, 2, \dots,$

$(k - 1)$ in the formula

$$w = \sqrt[k]{r} \left[\cos \left(\frac{\theta}{k} + n \frac{360^\circ}{k} \right) + i \sin \left(\frac{\theta}{k} + n \frac{360^\circ}{k} \right) \right]$$